***Лекция 11***

**Свободные колебания с одной степенью свободы без сопротивления.**

Рассматривается движение консервативной системы с одной степенью свободы около устойчивого положения равновесия, где выбрано начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии. После линеаризации (если система не линейна), кинетическая и потенциальная энергии системы приобретут вид квадратичных форм с постоянными коэффициентами.

Т=0.5а2 П=0.5cq2

a>0 ввиду положительности кинетической энергии, с>0 ввиду устойчивости положения равновесия

Уравнение Лагранжа:



приводит к **дифференциальному уравнению свободных колебаний без сопротивления**

a=-cq или +k2q=0 (k2=c/a сек-1)

Попробуем найти решение уравнения в виде экспоненты. Подставив

q=eλt

в уравнение, после сокращения на eλt получим *характеристическое уравнение* для определения неизвестного параметра λ

λ 2+ k2=0

Уравнение имеет два мнимых корня

λ = ±ki

Значит, уравнение имеет два независимых решения. Общее решение (второй интеграл) уравнения

q=C1Coskt+C2Sinkt

содержит две произвольные постоянные интегрирования С1 и С2 , которые могут быть найдены из начальных условий:

t=0: q=q0 ; =0

Чтобы их использовать, находим закон скорости (первый интеграл уравнения)

=-C1kSinkt+C2kCoskt

Подставляя начальные условия, находим при t=0

q0=C1 0=C2k, откуда C1=q0 C2= 0 /k

Окончательно

q=q0Coskt+(0 /k)Sinkt

Убеждаемся, что при устойчивом положении равновесия

c >0

система совершает периодическое движение c круговой собственной частотой

k=сек-1

Удобнее представить закон движения в виде одной функции синуса. Для этого перейдем к новым постоянным А и α так, чтобы получить синус суммы

С1=АSin α C2=ACos α

Получим

q=Asin(kt+ α)

Здесь А – амплитуда, (kt+α) – фаза, α- начальная фаза колебаний. Через период колебаний Т фаза синуса изменится на 2π радиан

k(t+T)+α= kt+α+2π

следовательно, период колебаний

T=2π/k сек

**Диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления.**

**Её связь с полной механической энергией.**

Практически любая система совершает колебания в некоторой среде. При движении системы возникают силы сопротивления среды. Например, силы вязкого сопротивления, пропорциональные первой степени скорости движения точек системы:

**F**k=-βk**v**k (k=1,2,...,n)

Найдем обобщенную силу сопротивления, учтя тождество Лагранжа:

Qсопр==-= - Ф/ 

Здесь введена диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления:

Ф=

Видим, что выражение Ф совпадает с выражением кинетической энергии Т, если в последнем массы точек заменить коэффициентами сопротивления в них. Чтобы найти Qсопр надо записать функцию Релея в обобщенных координатах:

**Vk**=(∂**r**k/∂q) 

Ф=

Система линейна по Ф, если b(q)=Const (аналогия с Т). Если нет, тогда рассматриваются малые движения: q<<1 – система линеаризуется: b(q)≈a(0). Значит, как и Т, функцию Релея следует вычислять в положении равновесия системы q=0, что всегда упрощает вычисления.

β' ρ



Вязкое сопротивление осуществляется с помощью линейных и угловых демпферов. Функция Релея вычисляется по формуле

Где - коэффициенты сопротивления линейных демпферов (амортизаторов),скорости их поршней, коэффициенты сопротивления вращению, угловые скорости вращающихся тел.

*Связь функции Релея с полной механической энергией.*

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и вязким сопротивлением.

Потенциальная и кинетическая энергии, функция Релея для нелинейной системы

П(q) T=0.5a(q) Ф=0.5b(q)

Имеют свойства

=2T =2Ф = +

Умножим уравнение Лагранжа для этой системы



на 



По формуле производной от произведения получаем

=-=2-

С учетом свойств функций Т, П, Ф получаем

2--=--2Ф или

(Т+П)=-2Ф 

Этот результат можно сформулировать так:

*Полная механическая энергия рассматриваемой системы убывает со скоростью* 

**Влияние сил вязкого сопротивления на движение системы.**

Дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением Получим из уравнения Лагранжа



После линеаризации (если требуется) получаем квадратичные формы

П=(q) T= Ф=

После подстановки в уравнение Лагранжа получаем **дифференциальное уравнение колебаний с сопротивлением**

или

 (\*)

если ввести обозначения

коэффициент сопротивления  и квадрат собственной частоты 

Найдем решение уравнения (\*) в виде экспоненты:

 (\*\*)

Подставив решение в уравнение (\*), после сокращения на , получим характеристическое уравнение рассматриваемого дифференциального уравнения



Если характеристическое уравнение имеет корни, то уравнение (\*) имеет решение вида (\*\*)

Это уравнение имеет 2 корня



которым соответствуют 2 независимых решения, сколько и должно быть у уравнения второго порядка.

Вид решений зависит от знака подкоренного выражения

1. ***Случай малого сопротивления ***

В этом случае корни комплексные и решение имеет вид

) < k

Это «второй интеграл» интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения

Первый интеграл есть обобщенная скорость

Как всегда, постоянные С1 С2 находятся из начальных условий:

t=0:  

откуда

Исследуем это решение, перейдя к новым постоянным интегрирования

C1=ASinα C2=ACosα

Теперь

Обозначим

– амплитуда, которая уменьшается с течением времени: рис (50).

Видим, что система совершает затухающие колебания. Они являются квазипериодическими, т.к только положение равновесия система проходит через равные промежутки времени . Квазипериод вычисляем как и для колебаний без сопротивления

Видим, что с увеличением сопротивления n, квазипериод увеличивается и становится бесконечным при

т.е при

колебания вообще прекращаются.

Быстрота затуханий колебаний характеризуется отношением соседних размахов (максимальных отклонений от положения равновесия)

называемым **декрементом** (затуханием).Часто используют логарифмический декремент

Измерив два соседних размаха и время можно, вычислить коэффициент сопротивления n

***2. Случай большого сопротивления***

В этом случае корни характеристического уравнения – вещественные числа,

следовательно,

C1 и C2 находятся из начальных условий.

Видим, что движение не колебательное (апериодическое). Пусть начальное отклонение положительно. График движения может иметь один из трех видов.

1. Система после отклонения асимптотически возвращается в положение равновесия.
2. Система сразу асимптотически возвращается в положение равновесия.
3. Система один раз пройдет через положение равновесия и вернется в положение равновесия с другой стороны.

***3. Случай***

Практически, маловероятное совпадение. Корни кратные. Апериодическое решение принимает вид.

Движения такие же, как и в случае